

| | |
|-------------|---|
| Title | 高次項を利用した連立代数方程式のある数値解法 (数値解析と新しい情報技術) |
| Author(s) | 布広, 永示; 柳沢, 幸雄; 五十嵐, 正夫 |
| Citation | 数理解析研究所講究録 (2004), 1362: 227-234 |
| Issue Date | 2004-04 |
| URL | http://hdl.handle.net/2433/25297 |
| Right | |
| Type | Departmental Bulletin Paper |
| Textversion | publisher |

高次項を利用した連立代数方程式のある数値解法

布広 永示* , 柳沢 幸雄** , 五十嵐 正夫***
(Eiji Nunohiro , Yukio Yanagisawa , Masao Igarashi)

*東京情報大学 , **Teesside 大学 , ***日本大学
(Tokyo University of Information Sciences, Teesside University, Nihon University)

概要

初期値の近傍に存在する連立代数方程式の解を数値的に求めたいという現実的な要請がある。我々は、Newton 法を用いた数値解法において、数値解の補正項の計算に高次項を用いることにより、その要請に対してある一定の結果を得た。この方法では、実数係数、実数初期値であっても、複素数計算を実行すれば、初期値の近傍にある複素解を求めることが可能である。ここで提案する方法と従来の Newton 法で得られた結果を比較した数値例を示す。

1 はじめに

連立代数方程式

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

を Newton 法で解くことを考える。便宜的に (1) を、ベクトルの形式で

$$f(x) = 0$$

とすると、Newton 法は

$$J(x^{(p)})x^{(p+1)} = J(x^{(p)})x^{(p)} - f(x^{(p)}) \quad (2)$$

と書かれる。ここで $J(x^{(p)})$ は次の Jacobi 行列である。

$$J(x^{(p)}) = \left(\frac{\partial f_i(x^{(p)})}{\partial x_j} \right). \quad (3)$$

このように Newton 法は与えられた多項式の 1 次偏導関数を用い、初期値 $x^{(0)}$ を出発値として連立 1 次方程式を解きながら厳密解に接近しようとする反復解法である。経験的には 1 変数の場合は、どんな初期値を選んでも、ほとんどの場合 $f(x)$ のあるゼロ点に接近するが、多変数の場合は初期値をうまく選ばないと計算のあふれが生じ、数値解が得られない場合がある。後者の場合の補正項を調べてみると、 $|J(x^{(p)})|$ の値がそれに対応する分子の部分の計算値に比べて

極端に小さくなり、結果としてその近似解が遠くに飛ぶ、と言った現象が起きている。与えられた出発値 $x^{(0)}$ に対して、次の近似解 $x^{(1)}$ がただ一つ決る従来型の Newton 法では、このような現象は避けることが出来ない。

著者らは高次導関数を用いて出発値 $x^{(0)}$ に対して、複数の次近似解候補 $x^{(1)}$ を用意し、その中から $|x^{(0)} - x^{(1)}|$ が最も小さくなる $x^{(1)}$ を順次選択するという方法を考案した。この解法は、Newton 法を用いる際の実践的な要請、すなわち「初期値に近い数値解を求めたい」にも合致する。

2 Newton 法の拡張

(2) は、初期値 (x_1, x_2, \dots, x_n) の十分近くに厳密解 $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \dots, x_n + dx_n)$ があると仮定し、(1) を x_j ($j = 1, \dots, n$) の点で Taylor 展開して得られる方程式

$$f_i(x_1 + dx_1, \dots, x_n + dx_n) = f_i(x_1, \dots, x_n) + \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=1}^n dx_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^k f_i(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

の2次以上の項を無視して

$$f_i(x_1 + dx_1, \dots, x_n + dx_n) = f_i(x_1, \dots, x_n) + \left(\sum_{j=1}^n dx_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) f_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (5)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

の関係式から各変数の補正值 dx_i を求める解法である。

この解法では、初期値 $x^{(0)}$ を一つ与えると次の近似解 $x^{(1)}$ はただ一つ決まる。このことは初期値 $x^{(0)}$ に近い数値解を求めたい、と言う要請に応じているとは言い難い。このため、初期値 $x^{(0)}$ に対して、複数の次近似解、例えば $x^{(1)}$ や $x'^{(1)}$ を合理的に作りだし、それらの近似解の中から初期値に近い近似解を選ぶ方法の必要性が生じる。

そこで、方程式 (5) の2次の項まで考慮し

$$f_i(x_1 + dx_1, \dots, x_n + dx_n) = f_i(x_1, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^2 \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=1}^n dx_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^k f_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (6)$$

$$i = 1, \dots, n$$

から、各変数の補正值 dx_i を求めることを考える。このように部分的に2次方程式を解きながら各変数の補正值を求める方法をここでは拡張 Newton 法と呼ぶことにする。

3 拡張 Newton 法の計算方法

(6) から

$$\sum_{k=1}^2 \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=1}^n dx_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^k f_i(x_1, \dots, x_n) = -f_i(x_1, \dots, x_n) \quad (7)$$

$$i = 1, \dots, n$$

が得られる。

2変数の場合を例として、本解法の計算方法を具体的に説明する。最初に連立代数方程式 (7) を行列表

現に直すと次のようになる。

$$\begin{pmatrix} f_{1x_1} & \frac{f_{1x_1x_1}}{2} & \frac{f_{1x_1x_2}}{2} + \frac{f_{1x_2x_1}}{2} & f_{1x_2} & \frac{f_{1x_2x_2}}{2} \\ f_{2x_1} & \frac{f_{2x_1x_1}}{2} & \frac{f_{2x_1x_2}}{2} + \frac{f_{2x_2x_1}}{2} & f_{2x_2} & \frac{f_{2x_2x_2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_1^2 \\ dx_1 dx_2 \\ dx_2 \\ dx_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(x_1, x_2) \\ -f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} \quad (8)$$

ここで、

$$\begin{aligned} f_{ix_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} f_i(x_1, x_2) \\ f_{ix_1x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f_i(x_1, x_2) \right) \\ f_{ix_1x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} f_i(x_1, x_2) \right) \\ f_{ix_2x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f_i(x_1, x_2) \right) \\ f_{ix_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2} f_i(x_1, x_2) \\ f_{ix_2x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} f_i(x_1, x_2) \right) \\ f_{ix_1x_2} &= f_{ix_2x_1} \\ i &= 1, 2 \end{aligned}$$

である。

次に、式 (8) に対する拡張 Newton 法の計算手順を示す。

【1】 簡単のため、初期値成分 $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}$ を

$$x_1 = x_1^{(0)}, \quad x_2 = x_2^{(0)}$$

と略記し、(8) に当てはめて係数行列と定数項を計算する。

【2】 定数項 $|f_1(x_1, x_2)|, |f_2(x_1, x_2)|$ の大きい方の行を枢軸行として選択する。

【3】 【2】 で選択した枢軸行を m とし、(8) の係数行列と定数項の m 行目に含まれる係数と定数から、仮の補正項を計算する。

(a) dx_1 又は dx_2 の項に対する仮の補正項の計算

$$d'_{x_j} = \frac{-f_m(x_1, x_2)}{f_{mx_j}} \quad (9)$$

$$j = 1, 2$$

(b) dx_1^2 又は dx_2^2 の項に対する仮の補正項の計算

$$d'_{x_j} = \pm \sqrt{\left| \frac{-f_m(x_1, x_2)}{\frac{f_m x_j x_j}{2}} \right|} \quad (10)$$

$$j = 1, 2$$

(c) $dx_1 dx_2$ の項に対する仮の補正項の計算

$$d'_{x_1} (= d'_{x_2}) = \pm \sqrt{\left| \frac{-f_m(x_1, x_2)}{f_m x_1 x_2} \right|} \quad (11)$$

【4】 近似解に対して、最も近傍に存在する次近似解を求めるために、【3】で求めた仮の補正項 d'_{x_j} の中から絶対値最小の仮の補正項に対する係数を枢軸要素として消去計算を行う。ここで、枢軸要素として採用する係数は、 dx_1 , dx_2 の両方が求まるように選択する必要がある。例えば、最初に dx_1 に対する係数を枢軸要素として選択した場合は、次の枢軸要素は dx_2 に対する係数から選択する。

【5】 【4】の消去計算の結果を用いて、補正項 $dx_1^{(t)}$, $dx_2^{(t)}$ を次のように計算する。

(a) 【4】で採用した仮の補正項が dx_1 又は dx_2 の項の時

$$dx_j^{(t)} = dx_j \quad j = 1, 2 \quad (12)$$

(b) 【4】で採用した仮の補正項が dx_1^2 又は dx_2^2 の項の時

$$dx_j^{(t)} = \pm \sqrt{dx_j^2} \quad j = 1, 2 \quad (13)$$

(c) 【4】で採用した仮の補正項が $dx_1 dx_2$ の項の時

$$dx_j^{(t)} = \pm \sqrt{dx_1 dx_2} \quad j = 1, 2 \quad (14)$$

【6】 次近似解成分を計算する。

$$x_j^{(t+1)} = x_j^{(t)} + dx_j^{(t)} \quad j = 1, 2 \quad (15)$$

【7】 条件 (p 進 l 桁)

$$\sum_{j=1}^2 \left| \frac{f_i(x_1^{(t+1)}, x_2^{(t+1)})}{f_i(x_1^{(t+1)}, x_2^{(t+1)})} \right| \text{の各項の絶対値最大の項} \leq p^{-l+1} \quad (16)$$

$$i = 1, 2$$

を満足すれば $x_j^{(t+1)}$ を近似解成分として反復計算を終了し、満足しなければ

$$x_j = x_j^{(t+1)} \quad j = 1, 2 \quad (17)$$

として【2】に進む。

4 計算例

(2) の Newton 法と本論文で示した拡張 Newton 法との比較を3つの具体例で検討してみる。

CASE 1

文献[2]にある、非線形抵抗回路であるトンネルダイオードを2個直列に接続した(図1)時のトンネルダイオードの電圧電流特性は、式(18)で与えられる。

$$I_1 = g_1(V_1) = 2.5V_1^3 - 10.5V_1^2 + 11.8V_1$$

$$I_2 = g_2(V_2) = 0.43V_2^3 - 2.69V_2^2 + 4.56V_2 \quad (18)$$

そして、回路の方程式は、

$$E - Rg_1(V_1) - (V_1 + V_2) = 0$$

$$g_1(V_1) - g_2(V_2) = 0 \quad (19)$$

となる。式(18)を式(19)に代入して、 $R = 13.3k [\Omega]$, $E = 30.0 [V]$ とすると、連立代数方程式

$$f_1(V_1, V_2) = -33.25V_1^3 + 139.65V_1^2 - 157.94V_1 - V_2 + 30.0 = 0$$

$$f_2(V_1, V_2) = 2.5V_1^3 - 10.5V_1^2 + 11.8V_1 - 0.43V_2^3 + 2.69V_2^2 - 4.56V_2 = 0 \quad (20)$$

を得る。次に、 $V_i = x_i$, $f_i(V_1, V_2) = f_i(x_1, x_2)$ とすると、式(20)は

$$\begin{aligned}
 f_1(x_1, x_2) &= -33.25x_1^3 + 139.65x_1^2 - 157.94x_1 \\
 &\quad - x_2 + 30.0 = 0 \\
 f_2(x_1, x_2) &= 2.5x_1^3 - 10.5x_1^2 + 11.8x_1 \\
 &\quad - 0.43x_2^3 + 2.69x_2^2 - 4.56x_2 = 0
 \end{aligned} \quad (21)$$

となる。

初期値を (2.0, 1.23) として、連立代数方程式 (21) の数値解を Newton 法と拡張 Newton 法で求める。

連立代数方程式 (21) の解 (x_{T1}, x_{T2}) と初期値 (2.0, 1.23) の距離

$$dst = \sqrt{|(x_{T1} - 2)|^2 + |(x_{T2} - 1.23)|^2} \quad (22)$$

を表 1 に示す。

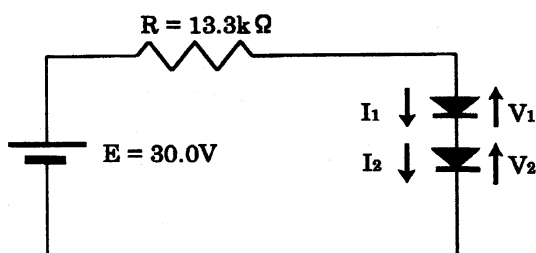


図 1: 非線形回路の例 1

表 1: 方程式 (21) の解と初期値 (2.0, 1.23) の距離

| 解 | x_{T1} | x_{T2} | dst |
|----|----------|----------|----------|
| #1 | 0.1998 | 3.7442 | 3.09224 |
| #2 | 2.2247 | 3.6930 | 2.47322 |
| #3 | 1.7755 | 3.7072 | 2.48795 |
| #4 | 2.3055 | 0.7056 | 0.606898 |
| #5 | 1.6663 | 0.7393 | 0.593416 |
| #6 | 1.7027 | 1.8090 | 0.650867 |
| #7 | 2.2776 | 1.8575 | 0.686162 |
| #8 | 0.2199 | 1.6730 | 1.83440 |
| #9 | 0.2282 | 0.8286 | 1.81670 |

#n: 解の番号

Newton 法と拡張 Newton 法の計算結果を表 2, 表 3 及び図 2 に示す。

Newton 法と拡張 Newton 法の計算結果を比較すると、Newton 法によって求めた数値解は、初期値から離れた解に収束しているのに対して、拡張 Newton 法では初期値 (2.0, 1.23) に最も近い解 (1.6663, 0.7393)

表 2: 方程式 (21) に対する Newton 法 (2) の計算結果

| t | x_1 | x_2 | $f_1(x_1, x_2)$ | $f_2(x_1, x_2)$ |
|---|-------------|------------|-----------------|-----------------|
| 0 | 2.0000 | 1.2300 | — | — |
| 1 | -4.4911 | -4.0551 | 6572.0 | -399.84 |
| 2 | -2.5724 | -2.0797 | 924.09 | 69.481 |
| 3 | -1.3181 | -0.79502 | 557.76 | -33.981 |
| 4 | -0.52180 | 1.6702E-02 | 155.14 | -9.4467 |
| 5 | -5.4311E-02 | 0.49695 | 39.498 | -2.3268 |
| 6 | 0.16631 | 0.73870 | 6.7039 | -0.39038 |
| 7 | 0.22429 | 0.81878 | 0.40717 | -1.9694E-02 |
| 8 | 0.22825 | 0.82848 | 1.83923E-03 | 1.5132E-05 |
| 9 | 0.22827 | 0.82863 | 5.5950E-07 | -4.6414E-09 |

t: 反復回数

表 3: 方程式 (21) に対する拡張 Newton 法の計算結果

| t | x_1 | x_2 | $f_1(x_1, x_2)$ | $f_2(x_1, x_2)$ |
|------|---|---------|-----------------|-----------------|
| 0 | 2.00000 | 1.23000 | — | — |
| 1 | 1 回目の消去計算の補正項 $dx_1^{(1)}, dx_2^{(1)}$ を求める計算において 1 次の項と比べて 2 次の項が影響大と判定。 $\cdot dx_1^{(1)} = \sqrt{dx_1^2}, dx_2^{(1)} = \sqrt{dx_2^2}$ とする → 2a-1 $\cdot dx_1^{(1)} = \sqrt{dx_1^2}, dx_2^{(1)} = -\sqrt{dx_2^2}$ とする → 2b-1 $\cdot dx_1^{(1)} = -\sqrt{dx_1^2}, dx_2^{(1)} = \sqrt{dx_2^2}$ とする → 2c-1 $\cdot dx_1^{(1)} = -\sqrt{dx_1^2}, dx_2^{(1)} = -\sqrt{dx_2^2}$ とする → 2d-1 | | | |
| 2a-1 | 2.3029 | 1.7740 | -0.96499 | -2.8067E-03 |
| 2a-2 | 2.2788 | 1.8606 | -5.1590E-02 | 6.6123E-03 |
| 2a-3 | 2.2776 | 1.8575 | -1.1125E-04 | 1.1030E-05 |
| 2b-1 | 2.3029 | 0.68601 | 0.12298 | 2.0571E-02 |
| 2b-2 | 2.3052 | 0.70512 | -4.7099E-04 | 6.9115E-04 |
| 2b-3 | 2.3052 | 0.70556 | -1.9549E-05 | 1.7664E-06 |
| 2c-1 | 1.6971 | 1.7740 | -0.12298 | -2.0571E-02 |
| 2c-2 | 1.7027 | 1.8096 | -9.1679E-04 | 5.5820E-04 |
| 2c-3 | 1.7027 | 1.8090 | -8.7287E-06 | 1.1216E-06 |
| 2d-1 | 1.6971 | 0.68601 | 0.96500 | 2.8070E-03 |
| 2d-2 | 1.6653 | 0.73613 | -2.8922E-02 | 6.6538E-03 |
| 2d-3 | 1.6664 | 0.73933 | -4.5555E-05 | 2.1212E-05 |

t: 反復回数

が求まっている。さらに、拡張 Newton 法の方が Newton 法と比較して収束が早いことが示されている。

CASE 2

文献 [1] にある、非線形抵抗回路であるトンネルダイオードを接続した (図 3) 時のトンネルダイオードの電圧電流特性は、式 (23) で与えられる。

$$\begin{aligned}
 I = g(V) &= 83.72V^5 - 226.31V^4 + 220.62V^3 \\
 &\quad - 103.79V^2 + 17.76V
 \end{aligned} \quad (23)$$

そして、回路の方程式は、

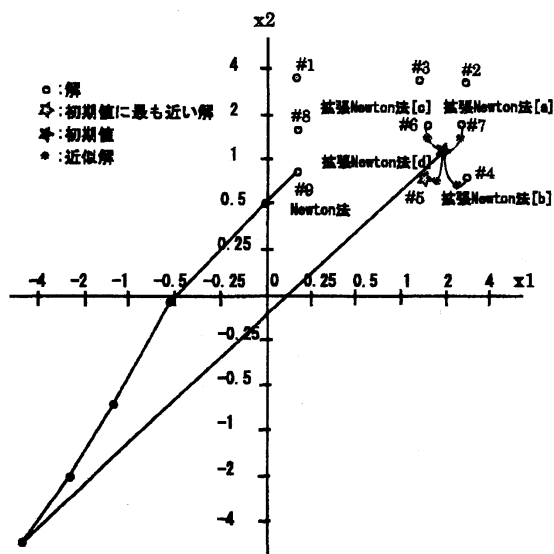


図 2: 方程式 (21) に対する計算結果

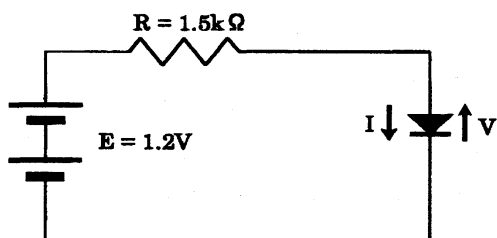


図 3: 非線形回路の例 2

$$\begin{aligned} g(V) - I &= 0 \\ V + RI - E &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

となる. 式(23)を式(24)に代入して, $R = 1.5k[\Omega]$, $E = 1.2[V]$ とすると, 連立代数方程式

$$\begin{aligned} f_1(V, I) &= 83.72V^5 - 226.31V^4 + 220.62V^3 \\ &\quad - 103.79V^2 + 17.76V - I = 0 \\ f_2(V, I) &= V + 1.5I - 1.2 = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

を得る. 次に, $V_i = x_i$, $f_i(V, I) = f_i(x_1, x_2)$ とすると, 式(25)は,

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= 83.72x_1^5 - 226.31x_1^4 + 220.62x_1^3 \\ &\quad - 103.79x_1^2 + 17.76x_1 - x_2 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) &= x_1 + 1.5x_2 - 1.2 = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

となる.

初期値を $(1.1, 1.1)$ として, 連立代数方程式(26)の数値解を Newton 法と拡張 Newton 法で求める.

連立代数方程式(26)の解 (x_{T1}, x_{T2}) と初期値 $(1.1, 1.1)$ の距離は, (22)と同様に,

$$dst = \sqrt{|(x_{T1} - 1.1)|^2 + |(x_{T2} - 1.1)|^2} \quad (27)$$

となる. それを表 4 に示す.

表 4: 方程式(26)の解と初期値 $(1.1, 1.1)$ の距離

| 解 | x_{T1} | x_{T2} | dst |
|----|----------------------|----------------------|---------|
| #1 | 0.24167 | 0.63889 | 0.97435 |
| #2 | 1.3361 | -9.0719E-02 | 1.0365 |
| #3 | 6.3001E-02 | 0.75800 | 1.0919 |
| #4 | 0.53122 +0.43308i | 0.44586 -0.28872i | 1.0111 |
| #5 | 0.53122 -0.43308i | 0.44586 +0.28872i | 1.0111 |

#n: 解の番号

Newton 法と拡張 Newton 法の計算結果を表 5, 表 6 及び図 4 に示す.

表 5: 方程式(26)に対する Newton 法(2)の計算結果

| t | x_1 | x_2 | $f_1(x_1, x_2)$ | $f_2(x_1, x_2)$ |
|----|-------------|---------|-----------------|-----------------|
| 0 | 1.1000 | 1.1000 | — | — |
| 1 | -7.2799 | 5.6532 | -2.4381E06 | -7.1526E-07 |
| 2 | -5.7185 | 4.6123 | -7.9872E05 | -2.3842E-07 |
| 3 | -4.4700 | 3.7800 | -261620.0 | 0.0 |
| 4 | -3.4720 | 3.1147 | -85679.0 | 2.3842E-07 |
| 5 | -2.6745 | 2.5830 | -28050.0 | 0.0 |
| 6 | -2.0377 | 2.1585 | -9178.9 | -2.3842E-07 |
| 7 | -1.5296 | 1.8197 | -3001.3 | 0.0 |
| 8 | -1.1249 | 1.5499 | -980.05 | 0.0 |
| 9 | -0.80338 | 1.3356 | -319.27 | 1.1921E-07 |
| 10 | -0.54921 | 1.1661 | -103.54 | -5.9605E-08 |
| 11 | -0.35013 | 1.0334 | -33.283 | 5.9605E-08 |
| 12 | -0.19702 | 0.93135 | -10.510 | -1.4901E-08 |
| 13 | -8.3467E-02 | 0.85565 | -3.1999 | 2.2352E-08 |
| 14 | -5.2313E-03 | 0.80358 | -0.89922 | 1.4901E-08 |
| 15 | 4.0833E-02 | 0.77278 | -0.20664 | 1.1176E-08 |
| 16 | 5.9647E-02 | 0.76024 | -2.6746E-02 | -3.7253E-08 |
| 17 | 6.2907E-02 | 0.75806 | -7.2724E-04 | -2.9802E-08 |
| 18 | 6.3001E-02 | 0.75800 | -5.8741E-07 | 7.4506E-09 |

t: 反復回数

Newton 法と拡張 Newton 法の計算結果を比較すると, Newton 法によって求めた数値解は, 初期値から

表 6: 方程式 (26) に対する拡張 Newton 法の計算結果

| t | x_1 | x_2 | $f_1(x_1, x_2)$ | $f_2(x_1, x_2)$ |
|----|---|-------------|-----------------|-----------------|
| 0 | 1.1000 | 1.1000 | — | — |
| 1 | 1 回目の消去計算の補正項 $dx^{(1)}$ を求める計算において 1 次の項と比べて 2 次の項が影響大と判定。 ・ $dx_1^{(1)} = \sqrt{dx_1^2}$ とする。→ 2a-1 ・ $dx_1^{(1)} = -\sqrt{dx_1^2}$ とする。→ 2b-1 | | | |
| 2a | 1.4067 | 6.6667E-02 | 8.6315 | 0.30674 |
| -1 | | | | |
| 2a | 1.3499 | -9.9926E-02 | 1.4143 | 2.2352E-08 |
| -2 | | | | |
| 2a | 1.3367 | -9.1154E-02 | 6.3674E-02 | -7.4506E-09 |
| -3 | | | | |
| 2a | 1.3361 | -9.0720E-02 | 2.2738E-04 | -2.2352E-08 |
| -4 | | | | |
| 2b | 0.79326 | 6.6667E-02 | -4.4859 | -0.30674 |
| -1 | | | | |
| 2b | 0.49788 | 0.46808 | -1.4752 | -2.9802E-08 |
| -2 | | | | |
| 2b | 0.28311 | 0.61126 | -0.20032 | 5.9605E-08 |
| -3 | | | | |
| 2b | 0.24425 | 0.63717 | -1.1535E-02 | 0.0 |
| -4 | | | | |
| 2b | 0.24168 | 0.63888 | -7.2703E-05 | -2.9802E-08 |
| -5 | | | | |
| 2b | 0.24167 | 0.63889 | 6.1535E-08 | -2.9802E-08 |
| -6 | | | | |

t:反復回数

離れた解に収束しているのに対して、拡張 Newton 法では初期値 (1.1, 1.1) に最も近い解 (0.24167, 0.63889) が求まっている。さらに、拡張 Newton 法の方が Newton 法と比較して収束が早いことが示されている。

CASE 3

1 個の実数解と 8 個の複素数解を持つ連立代数方程式

$$\begin{aligned}
 f_1(x_1, x_2) &= 2.5x_1^3 - 10.5x_1^2 + 12.8x_1 + x_2 - 1.0 \\
 &= 0 \\
 f_2(x_1, x_2) &= 2.5x_2^3 - 10.5x_2^2 + 12.8x_2 + x_1 - 2.0 \\
 &= 0
 \end{aligned}
 \quad (28)$$

の数値解を、初期値を (2.0, 2.0) として、Newton 法と拡張 Newton 法で求める。

連立代数方程式 (28) の解 (x_{T1}, x_{T2}) と初期値 (2.0, 2.0) の距離は (22) と同様に、

$$dst = \sqrt{|(x_{T1} - 2.0)|^2 + |(x_{T2} - 2.0)|^2} \quad (29)$$

となる。それを表 7 に示す。

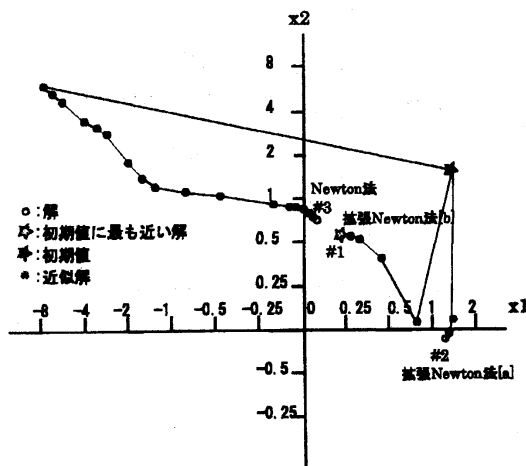


図 4: 方程式 (26) に対する計算結果

Newton 法と拡張 Newton 法の計算結果を表 8, 表 9 及び図 5, 図 6 に示す。連立代数方程式 (28) を Newton 法で解くことを試みたが、50 回反復しても収束しなかった。Newton 法と拡張 Newton 法の計算結果を比較すると、Newton 法では収束しなかったのに対して、拡張 Newton 法では実数初期値であっても、初期値 (2.0, 2.0) に最も近い数値解 $(2.21126 - 0.923499i, 2.19570 + 0.834806i)$ と $(2.21126 + 0.923499i, 2.19570 - 0.834806i)$ が求まっている。

5 むすび

本論文では、Newton 法を拡張した連立代数方程式の数値解を求めるアルゴリズムを提案し、幾つかの数値例を用いて、本アルゴリズムの評価を実施した。その結果、初期値に近い複数の数値解や初期値が実数であっても複数の複素解を得ることが可能であることを確認した。

本研究を進めるに当たって御教示を賜りました、平野晋保先生に深く感謝致します。

参考文献

- [1] 高瀬忠明・大石進一・井尾秀明・山村清隆, 非線形回路方程式複素根を求めるためのシンプリシャル不

表 7: 方程式 (28) の解と初期値 (2.0,2.0) の距離

| 解 | x_{T1} | x_{T2} | dst |
|----|-----------------------------|-----------------------------|--------|
| #1 | 2.2113 -0.92350i | 2.1957 +0.83480i | 1.2778 |
| #2 | 2.2113 +0.92350i | 2.1957 -0.83480i | 1.2778 |
| #3 | 2.0656 +0.96878i | 2.0128 +0.89439i | 1.3202 |
| #4 | 2.0656 -0.96878i | 2.0128 -0.89439i | 1.3202 |
| #5 | -7.5643E-02 -4.0086E-02i | 2.0116 +0.57834i | 2.1551 |
| #6 | -7.5643E-02 +4.0086E-02i | 2.0116 -0.57834i | 2.1551 |
| #7 | 6.8208E-02 | 0.17500 | 2.6575 |
| #8 | 2.0646 -0.73099i | -7.6287E-03 +5.6435E-02i | 2.1383 |
| #9 | 2.0646 +0.73099i | -7.6287E-03 -5.6435E-02i | 2.1383 |

#n: 解の番号

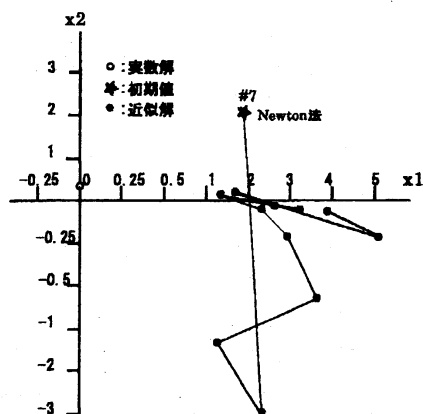


表 8: 方程式 (28) に対する Newton 法 (2) の計算結果

| t | x_1 | x_2 | $f_1(x_1, x_2)$ | $f_2(x_1, x_2)$ |
|-----|------------|-------------|-----------------|-----------------|
| 0 | 2.0000 | 2.0000 | — | — |
| 1 | 2.2222 | -2.7778 | 0.24966 | -169.94 |
| 2 | 1.7268 | -1.4567 | 1.2097 | -48.924 |
| 3 | 3.5499 | -0.66241 | 23.297 | -12.263 |
| 4 | 2.8258 | -0.22953 | 7.5071 | -2.6956 |
| 5 | 2.2496 | -4.7919E-02 | 3.0711 | -0.38812 |
| 6 | 1.3492 | 4.5298E-02 | 3.3416 | -9.2336E-02 |
| 7 | 3.0537 | -9.0594E-02 | 11.274 | -0.19390 |
| 8 | 2.4451 | -3.6233E-02 | 4.0315 | -3.2635E-02 |
| 9 | 1.7962 | 1.3981E-02 | 2.6167 | -2.6845E-02 |
| 10 | 5.0600 | -0.24481 | 118.57 | -0.73950 |
| 11 | 3.8560 | -0.13913 | 35.429 | -0.13482 |
| ... | | | | |
| 46 | 2.6721 | -5.2264E-02 | 5.8771 | -2.5914E-02 |
| 47 | 2.0937 | -8.8467E-03 | 2.7077 | -2.0327E-02 |
| 48 | 0.43414 | 0.12051 | 2.9030 | -0.17141 |
| 49 | -0.14973 | 0.19329 | -2.9671 | -4.9860E-02 |
| 50 | 3.5346E-02 | 0.17830 | -0.38228 | -2.0418E-03 |

t: 反復回数

図 5: 方程式 (28) に対する Newton 法 (2) の計算結果

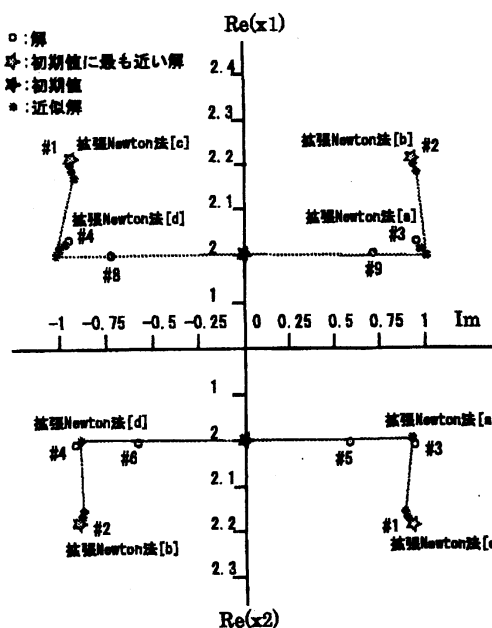


図 6: 方程式 (28) に対する拡張 Newton 法の計算結果

動点アルゴリズム, 電子通信学会論文誌, Vol.J66-A N0.11, pp.1122-1129, '83/11

[2] 奥村浩士・佐伯秀一・木嶋昭, 区間解析による非線形回路方程式の求解アルゴリズムに関する一考察, 電子通信学会論文誌, Vol.J69-A N0.4, pp.489-495, '86/4

[3] 佐藤力・川喜田秀行, 連立非線形方程式の数値解析法, 電子通信学会論文誌, Vol.J69-A N0.9, pp.1065-1072, '86/9

[4] 熊谷泰幸・平野菅保, 連立非線形方程式について, 情報処理学会第38回全国大会, 7B-5, pp.108-109, '89/3

[5] 神沢雄智・柏木雅英・大石進一・中村晴幸, 有限ステップで停止する非線形方程式のすべての解を精度保証付きで求めるアルゴリズム, 電子情報通信学会論文誌, Vol.J80-A N0.7, pp.1130-1137, '97/7

表 9: 方程式 (28) に対する拡張 Newton 法の計算結果

| t | x_1 | x_2 | $f_1(x_1, x_2)$ | $f_2(x_1, x_2)$ |
|------|---|----------------------|----------------------------|----------------------------|
| 0 | 2.00000 | 2.00000 | — | — |
| 1 | 1 回目の消去計算の補正項 $dx_1^{(1)}, dx_2^{(1)}$ を求める計算において 1 次の項と比べて 2 次の項が影響大と判定. $\cdot dx_1^{(1)} = \sqrt{dx_1^2}, dx_2^{(1)} = \sqrt{dx_2^2}$ とする. $\rightarrow 2a-1$ $\cdot dx_1^{(1)} = \sqrt{dx_1^2}, dx_2^{(1)} = -\sqrt{dx_2^2}$ とする. $\rightarrow 2b-1$ $\cdot dx_1^{(1)} = -\sqrt{dx_1^2}, dx_2^{(1)} = \sqrt{dx_2^2}$ とする. $\rightarrow 2c-1$ $\cdot dx_1^{(1)} = -\sqrt{dx_1^2}, dx_2^{(1)} = -\sqrt{dx_2^2}$ とする. $\rightarrow 2d-1$ | | | |
| 2a-1 | 2.00000 +1.01105i | 2.00000 +0.894427i | -4.76837E-07 -0.880528i | 1.31130E-06 -6.22631E-02i |
| 2a-2 | 2.06239 +0.96539894i | 2.0129991 +0.893786i | 5.09633E-02 -1.30171E-02i | 8.74808E-04 +1.05204E-03i |
| 2a-3 | 2.06566 +0.968785i | 2.01283 +0.894392i | -1.64306E-04 +1.01644E-04i | 5.01300E-08 -3.35800E-06i |
| 2b-1 | 2.00000 +1.01105i | 2.00000 -0.894427i | -4.76837E-07 -2.66938i | 1.31130E-06 +2.08436i |
| 2b-2 | 2.18996 +0.887776i | 2.18265 -0.800040i | 0.444617 -8.10453E-02i | 0.344347 +1.26484E-02i |
| 2b-3 | 2.21208 +0.924726i | 2.19601 -0.836062i | -1.62774E-02 +3.86761E-03i | -1.24666E-02 +1.13644E-03i |
| 2b-4 | 2.21126 +0.923499i | 2.19570 -0.834806i | -1.90809E-05 +2.35767E-06i | -1.66043E-05 +4.04886E-06i |
| 2c-1 | 2.00000 -1.01105i | 2.00000 +0.894427i | -4.76837E-07 +2.66938i | 1.31130E-06 -2.08436i |
| 2c-2 | 2.18996 -0.887776i | 2.18265 +0.800040i | 0.444617 +8.10453E-02i | 0.344347 -1.26484E-02i |
| 2c-3 | 2.21208 -0.924726i | 2.19601 +0.836062i | -1.62774E-02 -3.86761E-03i | -1.24666E-02 -1.13644E-03i |
| 2c-4 | 2.21126 -0.923499i | 2.19570 +0.834806i | -1.90809E-05 -2.35767E-06i | -1.66043E-05 -4.04886E-06i |
| 2d-1 | 2.00000 -1.01105i | 2.00000 -0.894427i | -4.76837E-07 +0.88052827i | 1.31130E-06 +6.22631E-02i |
| 2d-2 | 2.06239 -0.965398i | 2.01299 -0.893786i | 5.09633E-02 +1.30171E-02i | 8.74808E-04 -1.05204E-03i |
| 2d-3 | 2.06566 -0.968785i | 2.01283 -0.894392i | -1.64306E-04 -1.01644E-04i | 5.01300E-08 +3.35800E-06i |